Aula 25

Eq. Diferenciais Parciais de Segunda Ordem e Séries de Fourier

Equação de Laplace (Elíptica)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{Sol:} u(x, y)$$

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \qquad \text{Sol:} u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Equação de Fourier do Calor (Parabólica)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{Sol:} u(x, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$$

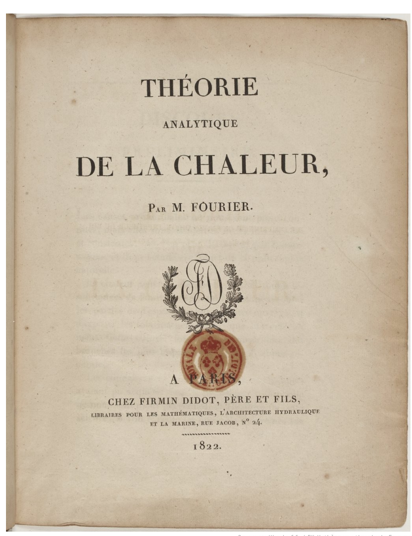
$$\text{Sol:} u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$$

Equação de D'Alembert das Ondas (Hiperbólica)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{Sol:} u(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$$

$$\text{Sol:} u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$$


THÉORIE
ANALYTIQUE
DE LA CHALEUR,
PAR M. FOURIER.

A PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,
LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE
ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

Problema de Valor Inicial e Fronteira

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
\\
u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L \\
u(0,t) = g_0(t), \quad u(L,t) = g_L(t) \qquad t > 0
\end{cases}
$$

Equação linear homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\mathcal{L}(u)} = 0$$

e condições de fronteira homogéneas

$$g_0(t) = g_L(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t > 0.$$

Vale o Princípio da Sobreposição

ou seja

combinações lineares de soluções da equação homogénea com cond. fronteira homogéneas ainda são soluções

ou seja

o conjunto das soluções da equação homogénea com cond. fronteira homogéneas é um espaço vectorial (de dimensão infinita)

Análogo ao sistema de EDOs

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{y}' - A\mathbf{y} = 0$$